Theorie Woche 4:

o Lineare Räume <=> Vektorräume: Skript S. 55

Alle Eigenschaften & Regeln, sowie Beispiele zu Vektorräumen finden sich im Skript.

Muss man überprüfen, ob es sich bei einer Menge um einen Vektorraum handelt, so kann man einfach stur alle 8 (je nach Definition können es auch nur 7 oder aber 9 sein) Axiome überprüfen.

Bemerkung: Einen Widerspruch findet man meistens am einfachsten mithilfe des 3. Axioms ~> die Existenz eines Nullvektors.

Beispiel 4.1:
$$V = \left\{ \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ x \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$$
Problem!

=> kein Vektorraum, da kein Nullelement gegenüber der Addition

Ergänzung: Uns interessieren auch komplexe Vektorräume, namentlich $C[a,b]$, der Raum der auf dem Intervall $[a,b]$ stetigen Funktionen ~> Es gelten dieselben Axiome. Am häufigsten kommt der Raum der Polynome $\mathcal{P}$ vor.

o Lineare Unterräume <=> Untervektorräume: Skript S. 56 ff.

Alle Eigenschaften & Regeln, sowie Beispiele zu Untervektorräumen finden sich im Skript.

Linearkombination, Erzeugendensystem, lineare Unabhängigkeit und Basis: Skript S. 58 - 61

Eine Einführung und Beispiele finden sich im Skript. Kurz in eigenen Worten:

- Kann jeder Vektor $\underline{b} \in V$ eines Vektorraumes V als Linearkombination der Vektoren $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)} \in V$ dargestellt werden, so bilden ebendiese Vektoren ein Erzeugendensystem von V.

  Bemerkung: Es braucht genau so viele linear unabhängige Vektoren wie die Dimension n des Vektorraumes, um diesen aufzuspannen, im Erzeugendensystem dürfen aber auch redundante, also linear abhängige, Vektoren sein.

  Bemerkung: Muss man eine Menge an Vektoren daraufhin überprüfen, ob es sich um ein Erzeugendensystem handelt, so bildet man einfach die Matrix, gausst, und falls sie vollen Rang hat, so haben wir unser Bedürfnis an lin. unabh. Vektoren gedeckt, und haben folglich ein Erzeugendensystem.

- Die Basis eines VR besteht nur aus der minimal nötigen Anz. an lin. unabh. Vektoren, die nötig ist, um das Erzeugendensystem zu bilden. D.h. keine lin. abh. Vektoren!

→ Bestimmung einer Basis aus einer Vektorschar:

⇒ Matrix bilden, gaussen, Spalten mit Pivots $\hat{=}$ den Vektoren der Basis (ursprüngliche Spaltenvektoren!)

Beispiel 4.2: $\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\5\end{bmatrix}$ Wollen Basis des $\mathbb{R}^3$!

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix}\downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[III-I]{II+2I}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{III-II} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} & 0 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Also 1., 2. & 4. ursprüngliche Spalte

$$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^3 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix}\right\}$$

Bemerkung: Das ist nicht die einzige gültige Auswahl aus der Vektorschar! Man kann jeweils auch zum nächsten nicht-null Element rutschen und dieses wählen, aber Achtung: natürlich nicht zweimal denselben Vektor.

⇒ Ebenfalls richtig:
- statt 4. den 6. Vektor
- statt 2. den 5. Vektor
- statt 1. den 3. Vektor usw.

∘ Dimension : —

- Anzahl Vektoren, aus denen die Basis des Vektorraumes besteht
- Rang nach dem Gaussen $\hat{=}$ dim(Bild) (kommt nächste Woche)

Beispiel 4.3: Der $\mathbb{R}^3$ hat Dimension 3, denn man benötigt 3 Vektoren um ihn aufzuspannen.